欧拉公式

欧拉公式（英語：Euler's formula，又稱**尤拉公式**）是複分析领域的公式，它將三角函数與复指数函数关联起来，因其提出者莱昂哈德·歐拉而得名。歐拉公式提出，對任意实数 x，都存在

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

其中 e 是自然对数的底数，i 是虛数單位，而 cos 和 sin 則是餘弦、正弦對應的三角函数，参数 x 則以弧度为单位[1]。這一複數指數函數有時還寫作 cis *x*（英語：**c**osine plus **i** **s**ine，余弦加i 乘以正弦）。由於該公式在 x 為複數時仍然成立，所以也有人將這一更通用的版本稱為歐拉公式[2]。

歐拉公式在数学、物理和工程领域应用广泛。物理学家理查德·费曼将歐拉公式称为："我们的珍宝"和"数学中最非凡的公式"[3]。

当 $x = \pi$ 时，歐拉公式变为$e^{i\pi} + 1 = 0$，即歐拉恒等式。

在複分析的應用

這公式可以說明當 x 為實數時，函數 e^{ix} 可在複數平面描述一單位圓。且 x 為此平面上一條連至原點的線與正實數軸的交角。先前一個在複數平面的複點只能用笛卡尔坐标系描述，歐拉公式在此提供複點至極坐標的變換

任何複數 $z = x + yi$ 皆可記為

$$z = x + iy = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = |z|e^{i\phi}$$
$$\bar{z} = x - iy = |z|(\cos\phi - i\sin\phi) = |z|e^{-i\phi}$$

在此

$x = \mathrm{Re}\{z\}$ 為實部
$y = \mathrm{Im}\{z\}$ 為虛部
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$為 z 的模

$$\phi = \operatorname{atan2}(y, x)\text{，其中 } \operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & y \geq 0, x < 0 \\ -\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & y < 0, x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0, x = 0 \\ \text{undefined} & y = 0, x = 0 \end{cases}$$

历史

約翰·伯努利注意到有[4]

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix}\right).$$

并且由于

$$\int \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a}\ln(1+ax) + C,$$

上述公式通过把自然对数和复数（虚数）联系起来，告诉我们关于複對數的一些信息。然而伯努利并没有计算出这个积分。

欧拉也知道上述方程，伯努利对欧拉的回应表明他还没有完全理解复对数。欧拉指出复对数可以有无穷多个值。

与此同时，罗杰·柯特斯于 1714 年发现[5]

$$ix = \ln(\cos x + i\sin x).$$

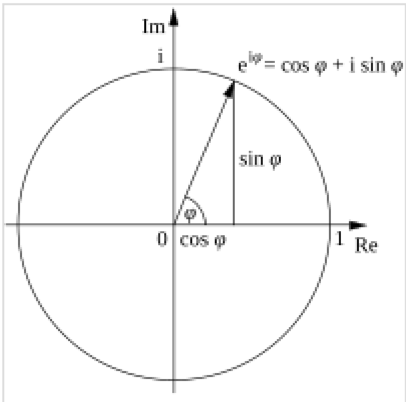
由于三角函数的周期性，一个复数可以加上 $2i\pi$ 的不同倍数，而它的复对数可以保持不变。

1740年左右，欧拉把注意力从对数转向指数函数，得到了以他命名的欧拉公式。欧拉公式通过比较指数的级数展开和三角函数得到（其实此证法存在问题，原因见验证方法，但结论正确。），于1748年发表[6][5]。

大约50年之后，卡斯帕尔·韦塞尔提出可以把复数視做复平面中的点。

形式

对于任意实数x，以下等式恆成立：



$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

由此也可以推导出

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{及} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}。$$

当$x = \pi$时，欧拉公式的特殊形式为

$$e^{i\pi} + 1 = 0。$$

证明

首先，在复数域上对e^x 进行定义：

对于$a, b \in \mathbb{R}, c = a + ib \in \mathbb{C}$，规定$e^c = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{c}{n})^n$。

对复数的极坐标表示$w = u + iv = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，有：

$$r = \sqrt{u^2 + v^2} \in \mathbb{R}, \theta = \arctan(\frac{v}{u}) \in \mathbb{R}$$

且根据棣莫弗公式，$w^n = (u + iv)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

从而有：

$$(1 + \frac{a + bi}{n})^n = [(1 + \frac{a}{n}) + i\frac{b}{n}]^n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$

假设$n > |a|$，则：

$$r_n = [(1 + \frac{a}{n})^2 + (\frac{b}{n})^2]^{\frac{n}{2}}, \theta_n = n\arctan\frac{\frac{b}{n}}{1 + \frac{a}{n}}$$

（由於包含n在幂，所以要ln）从而有：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln r_n &= \lim_{n\to\infty}[\frac{n}{2}\ln(1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2})] \\ &= \lim_{n\to\infty}[\frac{n}{2}(\frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2})] \\ &= a\end{aligned}$$

這一步驟用到 $\ln(1 + x) \approx x$（墨卡托級數）

即：

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln r_n} = e^a$$

又有(arctan x 約等於x 於0附近)：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\theta_n &= \lim_{n\to\infty}(n\arctan\frac{\frac{b}{n}}{1 + \frac{a}{n}}) \\ &= \lim_{n\to\infty}(n\frac{\frac{b}{n}}{1 + \frac{a}{n}}) \\ &= b\end{aligned}$$

从而可以证明：

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a + bi}{n})^n = e^a(\cos b + i\sin b)$$

即：

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$$

令$a=0$，可得欧拉公式。

证毕。[7]

验证方法

方法一：泰勒级数

把函数e^x、$\cos x$和$\sin x$写成泰勒级数形式：

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots
\end{aligned}$$

将$x=iz$代入e^x可得：

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \frac{(iz)^8}{8!} + \cdots \\
&= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \frac{iz^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \cos z + i\sin z
\end{aligned}$$

方法二：求導法

对于所有$x \in I$，定義函數$f(x) = \dfrac{\cos x + i\sin x}{e^{ix}}$

由於$e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^0 = 1$

可知e^{ix}不可能為0，因此以上定義成立。

$f(x)$之导数為：

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(-\sin x + i\cos x)\cdot e^{ix} - (\cos x + i\sin x)\cdot i \cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2} \\
&= \frac{-\sin x \cdot e^{ix} - i^2 \sin x \cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2} \\
&= \frac{-\sin x \cdot e^{ix} + \sin x \cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

设$[a,b] \in I$和$c \in (a,b)$

$f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.（拉格朗日中值定理）

$\because f'(x)=0$
$\therefore f'(c)=0$
$f(a)=f(b)$
因此$f(x)$必是常數函數。
$f(x)=f(0)$

$$\frac{\cos x+i\sin x}{e^{ix}}=\frac{\cos 0+i\sin 0}{e^0}=1$$

重新整理，即可得到：
$e^{ix}=\cos x+i\sin x$

方法三：微積分

找出一个原函數$y(x)$，使得$\frac{dy}{dx}=iy$及$y(0)=1$。
假设 $y(x)=e^{ix}$，有：
$\frac{d}{dx}e^{ix}=ie^{ix}=iy$
假设 $y(x)=i\sin x+\cos x$，有：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos x+i\sin x)&=-\sin x+i\cos x\\&=i(i\sin x+\cos x)\\&=iy\end{aligned}$$

使用積分法，可得iy的原函數是以上兩個函數分别与任意实数的和，分别记为：
$y_1(x)=e^{ix}+C_1$
$y_2(x)=\cos x+i\sin x+C_2$
其中，$\mathbb{C}_1$和:$\mathbb{C}_2$是任意实数。

又$x=0$時，$y(0)=1$，观察到：
$y_1(0)=e^{i0}+C_1=e^0+C_1=1+C_1$
$y_2(0)=\cos 0+i\sin 0+C_2=1+i(0)+C_2=1+C_2$
所以$C_1=C_2=0$，可以得出：
$y(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x$

cis函數

在複分析領域，歐拉公式亦可以以函數的形式表示

$$\operatorname{cis}\theta=\cos\theta+i\sin\theta$$
$$\operatorname{cis}\theta=e^{i\theta}$$

並且一般定義域為$\theta\in\mathbb{R}$，值域為$\theta\in\mathbb{C}$（复平面上的所有单位向量)。

當一複數的模為1，其反函數就是輻角（arg函數）。

當θ值為複數時，cis函數仍然是有效的，所以有些人可利用cis函數將歐拉公式推廣到更複雜的版本。[2]

檢定和角公式

由於$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$且$e^{i\beta}=\cos\beta+i\sin\beta$，則有

$$\begin{aligned}e^{i(\alpha+\beta)}&=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)=e^{i\alpha+i\beta}\\&=e^{i\alpha}\times e^{i\beta}\\&=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\times(\cos\beta+i\sin\beta)\\&=(\cos\alpha\times\cos\beta+i\sin\alpha\times i\sin\beta)+(i\sin\alpha\times\cos\beta+\cos\alpha\times i\sin\beta)\\&=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

實部等於實部，虛部等於虛部，因此

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

參見

- cis函數
- 歐拉恆等式

参考资料

1. Eulers Formula. 密蘇里科技大學. [2021-06-13]. （原始内容存档于2020-02-21）.
2. Moskowitz, Martin A. A Course in Complex Analysis in One Variable. World Scientific Publishing Co. 2002: 7. ISBN 981-02-4780-X.
3. Feynman, Richard P. The Feynman Lectures on Physics, vol. I. Addison-Wesley. 1977: 22-10. ISBN 0-201-02010-6.
4. Bernoulli, Johann. Solution d'un problème concernant le calcul intégral, avec quelques abrégés par rapport à ce calcul [Solution of a problem in integral calculus with some notes relating to this calculation]. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris. 1702, **1702**: 197–289.
5. John Stillwell. Mathematics and Its History. Springer. 2002 [2018-07-17]. （原始内容存档于2019-06-04）.
6. Leonard Euler (1748) Chapter 8: On transcending quantities arising from the circle (http://www.17centurymaths.com/contents/euler/introductiontoanalysisvolone/ch8vol1.pdf) （页面存档备份 (https://web.archive.org/web/20171115083159/http://www.17centurymaths.com/contents/euler/introductiontoanalysisvolone/ch8vol1.pdf)，存于互联网档案馆） of Introduction to the Analysis of the Infinite, page 214, section 138 (translation by Ian Bruce, pdf link from 17 century maths).
7. 张筑生. 数学分析新讲（第一册）第七章 4.实变复值函数. 北京大学出版社. 1990.