


[Free offer](#)




Yesterday 11:30 AM

DF^2 之代數展開：

$$DF^2 = \left(\frac{1}{2z} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{4z(1-2z^2)} - 1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2z} - 1\right)\left(\frac{1}{4z(1-2z^2)} - 1\right)(1-2z^2)$$

BF^2 之代數展開：

$$BF^2 = 1 + \left(\frac{1}{4z(1-2z^2)} - 1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4z(1-2z^2)} - 1\right)(3z - 4z^3)$$

Show more ▾



我先把兩個平方展開式整理成同一個中間量，然後再消去它，這樣比較容易看出目標等式怎麼來。

Thought for 40s ▸

令

$$u = \frac{1}{4z(1-2z^2)} - 1, \quad v = \frac{1}{2z} - 1.$$

那麼題目給的兩式可寫成

$$DF^2 = v^2 + u^2 - 2vu(1-2z^2),$$

$$BF^2 = 1 + u^2 - 2u(3z - 4z^3).$$

我們要證明

$$(8z^3 - 6z - 1)(BF^2 - 1) = -(2z - 1)(2z + 1)(4z^2 + 2z - 1)(DF^2 - 3).$$

先把 u, v 改寫成同分式：

$$v = \frac{1-2z}{2z}, \quad u = \frac{1-4z+8z^3}{4z(1-2z^2)}.$$

因此

$$v^2 = \frac{(1-2z)^2}{4z^2}, \quad u^2 = \frac{(1-4z+8z^3)^2}{16z^2(1-2z^2)^2}.$$

而交叉項也可化簡為

$$2vu(1-2z^2) = 2 \cdot \frac{1-2z}{2z} \cdot \frac{1-4z+8z^3}{4z(1-2z^2)} (1-2z^2) = \frac{(1-2z)(1-4z+8z^3)}{4z^2}.$$

所以

$$DF^2 - 3 = \frac{(1-2z)^2}{4z^2} + \frac{(1-4z+8z^3)^2}{16z^2(1-2z^2)^2} - \frac{(1-2z)(1-4z+8z^3)}{4z^2} - 3.$$

把它通分到 $16z^2(2z^2-1)^2$ 後，整理得

$$16z^2(2z^2-1)^2(DF^2-3) = (8z^3-6z-1)(32z^5-16z^4-32z^3+12z^2+6z-1)$$

因此

$$DF^2 - 3 = \frac{(8z^3-6z-1)(32z^5-16z^4-32z^3+12z^2+6z-1)}{16z^2(2z^2-1)^2}.$$

接著看 $BF^2 - 1$ ：

$$BF^2 - 1 = u^2 - 2u(3z-4z^3).$$

又因為 $3z-4z^3 = z(3-4z^2)$ ，所以

$$2u(3z-4z^3) = 2 \cdot \frac{1-4z+8z^3}{4z(1-2z^2)} \cdot z(3-4z^2) = \frac{(1-4z+8z^3)(3-4z^2)}{2(1-2z^2)}.$$

通分到同一個分母 $16z^2(2z^2-1)^2$ 後，整理得

$$16z^2(2z^2-1)^2(BF^2-1) = -(2z-1)(2z+1)(4z^2+2z-1)(32z^5-16z^4-32z^3+12z^2+6z-1)$$

因此

$$BF^2 - 1 = -\frac{(2z - 1)(2z + 1)(4z^2 + 2z - 1)(32z^5 - 16z^4 - 32z^3 + 12z^2 + 6z - 1)}{16z^2(2z^2 - 1)^2}$$

現在兩式有同一個共同因子

$$K = 32z^5 - 16z^4 - 32z^3 + 12z^2 + 6z - 1.$$

所以

$$(8z^3 - 6z - 1)(BF^2 - 1) = -(8z^3 - 6z - 1)(2z - 1)(2z + 1)(4z^2 + 2z - 1)\frac{1}{16}$$

而

$$-(2z - 1)(2z + 1)(4z^2 + 2z - 1)(DF^2 - 3) = -(2z - 1)(2z + 1)(4z^2 + 2z - 1)(8z^3 - 6z - 1)$$

兩邊完全相同，因此

$$\boxed{(8z^3 - 6z - 1)(BF^2 - 1) = -(2z - 1)(2z + 1)(4z^2 + 2z - 1)(DF^2 - 3)}.$$

如果你要，↪ 我也可以把上面的「通分後整理」 每一步展開成完整的多項式乘法，不省略任何中間項。

