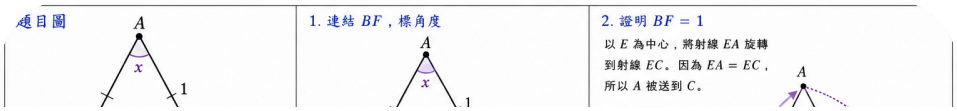
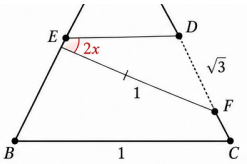
Free offer

This is a copy of a shared ChatGPT conversation

Report conversation


題目圖
A
x
1
1. 連結 BF，標角度
A
x
1
2. 證明 $BF = 1$
以 E 為中心，將射線 EA 旋轉
到射線 EC。因為 $EA = EC$，
所以 A 被送到 C。
A



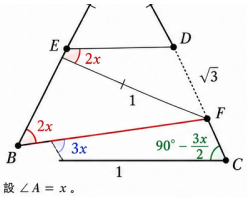
已知：$\triangle ABC$ 為等腰三角形，$AB = AC$

D 在 AC 上，E 在 AB 上，F 在 CE 上

$AE = CE$, $AD = BC = EF = 1$, $DF = \sqrt{3}$

求：$\angle A$ 大小

關鍵輔助線：連結 BF



設 $\angle A = x$。

因為 $AE = CE$，得 $\triangle ACE$ 等腰，

$\angle AEC = 180^\circ - 2x$，故 $\angle BEF = 2x$。

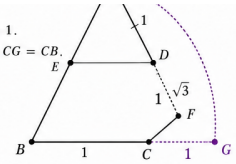
（因為 A, E, B 共線，E, F, C 共線）

下面要證明 $BF = 1$。

令 D 的像為 G。

則 $CG = AD = 1$.

又 $CB = 1$，故 $CG = CB$.



旋轉保持距離與角度，配合 $DF = \sqrt{3}$，$EF = 1$，

可以得到 $\triangle BFG$ 與 $\triangle EFD$ 全等，

因此 $BF = EF = 1$。

所以 $\triangle BEF$ 為等腰，$BF = EF$，底角相等，

$\angle EBF = \angle BEF = 2x$，故 $\angle ABF = 2x$。

3. 在 $\triangle BCF$ 中的角度

因為 $BC = BF$，故 $\triangle BCF$ 等腰，

$\angle BCF = \angle CFB$。

又 F 在 CE 上，

4. 求 $\angle A$

在頂點 B，

$\angle ABC = \angle ABF + \angle FBC = 2x + 3x = 5x$。

1m 30s考えました ›

有，而且可以完全避開「解五次方程式」。

關鍵不是把五次式的根找出來，而是直接證明：

$$DF^2 = 3 \quad \Longrightarrow \quad BF^2 = 1.$$

這樣一旦得到 $BF = 1$，後面只需角度追蹤。

設

$$\angle A = 2x, \qquad 0 < x < 30^\circ,$$

並令

$$z = \sin x.$$

因為 $AB = AC$、$BC = 1$，所以

$$AC = \frac{1}{2\sin x} = \frac{1}{2z}.$$

又因為 $AE = CE$，而

$$\angle EAC = \angle ACE = 2x,$$

所以在等腰三角形 ACE 中：

$$AC = 2CE\cos 2x.$$

因此

$$CE = \frac{1}{4z\cos 2x}.$$

由 $AD = EF = 1$，得到

$$CD = \frac{1}{2z} - 1, \qquad CF = \frac{1}{4z\cos 2x} - 1.$$

分別寫出 DF^2 與 BF^2

在 $\triangle CDF$ 中，

$$\angle DCF = 2x,$$

所以

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 - 2(CD)(CF)\cos 2x.$$

在 $\triangle BCF$ 中，

$$\angle BCF = \angle BCE = 90^\circ - 3x.$$

因此

$$\cos\angle BCF = \sin 3x,$$

而 $BC = 1$，所以

$$BF^2 = 1 + CF^2 - 2CF\sin 3x.$$

現在把

$$CD = \frac{1}{2z} - 1, \qquad CF = \frac{1}{4z(1-2z^2)} - 1$$

代入，利用

$$\sin 3x = 3z - 4z^3, \qquad \cos 2x = 1 - 2z^2,$$

整理後可以直接得到這個恆等式：

$$\boxed{(8z^3 - 6z - 1)(BF^2 - 1) = -(2z-1)(2z+1)(4z^2+2z-1)(DF^2 - 3)}.$$

這不是另外解方程，而只是把兩個餘弦定理所得的式子消去共同部分。

題目給

$$DF^2 = 3,$$

所以右邊為零：

$$(8z^3 - 6z - 1)(BF^2 - 1) = 0.$$

但

$$8z^3 - 6z - 1 = -2(3z - 4z^3) - 1 = -2\sin 3x - 1.$$

由於 $0 < x < 30^\circ$，所以

$$\sin 3x > 0,$$

因此

$$-2\sin 3x - 1 < 0,$$

不可能等於零。

故只能是

$$BF^2 - 1 = 0,$$

也就是

$$\boxed{BF = 1}.$$

得到 $BF = 1$ 後只剩角度追蹤

因為

$$BF = EF = 1,$$

所以 $\triangle BEF$ 是等腰三角形。

在 $\triangle ACE$ 中：

$$\angle AEC = 180^\circ - 4x.$$

而 A, E, B 共線，所以

$$\angle BEF = 4x.$$

因此

$$\angle EBF = 4x.$$

也就是

$$\angle ABF = 4x.$$

另一方面，

$$BC = BF = 1,$$

所以 $\triangle BCF$ 也是等腰三角形。

前面已有

$$\angle BCF = 90^\circ - 3x,$$

因此

$$\angle CFB = 90^\circ - 3x,$$

所以

$$\angle FBC = 180^\circ - 2(90^\circ - 3x) = 6x.$$

於是

$$\angle ABC = \angle ABF + \angle FBC = 4x + 6x = 10x.$$

但 ABC 是等腰三角形，頂角為 $2x$，所以

$$\angle ABC = 90^\circ - x.$$

因此

$$10x = 90^\circ - x,$$

$$11x = 90^\circ,$$

$$x = \frac{90^\circ}{11}.$$

故

$$\boxed{\angle A = 2x = \frac{180^\circ}{11}}.$$

這個方法仍然用了三角函數與代數整理，但它不需要猜根或解五次方程。真正的核心被壓縮成一個直接關係：

$$DF = \sqrt{3} \Longrightarrow BF = 1.$$

而純幾何解應該就是用某個輔助構造直接證明這個關係。

∠A=2x,0<x<30∘

這個前提是怎麼來的?

$\angle A = 2x$ 只是方便記號，因為等腰三角形的底角會變成 $90^\circ - x$。

而

$$0 < x < 30^\circ$$

是由 D 在邊 AC 上且 $AD = 1$ 推出的。

因為 D 是 AC 上的內點，所以

$$AC > AD = 1.$$

在等腰三角形 ABC 中，若

$$\angle A = 2x, \qquad BC = 1,$$

把頂角平分後可得一個直角三角形，其斜邊是 AC，對邊是 $BC/2 = 1/2$。因此

$$\sin x = \frac{1/2}{AC},$$

也就是

$$AC = \frac{1}{2\sin x}.$$

由 $AC > 1$:

$$\frac{1}{2\sin x} > 1$$

所以

$$2\sin x < 1, \qquad \sin x < \frac{1}{2}.$$

又因為三角形頂角滿足

$$0 < 2x < 180^\circ,$$

所以

$$0 < x < 90^\circ.$$

在這個範圍內，$\sin x < 1/2$ 等價於

$$0 < x < 30^\circ.$$

因此：

$$\boxed{0 < x < 30^\circ}.$$

如果只把「D 在 AC 上」理解成可以包含端點，那先得到的是 $x \le 30^\circ$；但 $x = 30^\circ$ 時 $AC = 1$，會使 $D = C$，再代入其餘條件會與圖形配置衝突，所以實際仍是嚴格小於。

因為AC>BC，所以A<60degree，對嗎?

對，而且這個推法比我前面的還直接。

由於

- $AB = AC$
- $BC = 1$
- $AD = 1$
- D 在 AC 上且是內點

所以

$$AC > AD = 1 = BC.$$

因此

$$AC > BC.$$

在任何三角形中，**邊越長，對角越大**。

所以

$$AC > BC \quad \Longrightarrow \quad \angle B > \angle A.$$

又因為 $AB = AC$，所以

$$\angle B = \angle C.$$

於是

$$2\angle B + \angle A = 180^\circ.$$

設 $\angle A = \alpha$，則

$$2\angle B = 180^\circ - \alpha.$$

而 $\angle B > \alpha$，因此

$$180^\circ - \alpha > 2\alpha,$$

整理得到

$$180^\circ > 3\alpha,$$

所以

$$\boxed{\angle A < 60^\circ.}$$

如果設

$$\angle A = 2x,$$

就立刻得到

$$2x < 60^\circ \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x < 30^\circ.}$$

這個證明完全不需要用三角函數，只利用了：

1. $AC > BC$

2. 長邊對大角
3. 等腰三角形兩底角相等

是更漂亮、更幾何的推法。

DF2=CD2+CF2−2(CD)(CF)cos2x.
BF2=1+CF2−2CFsin3x.

怎麼得到

(8z3−6z−1)(BF2−1)=−(2z−1)(2z+1)(4z2+2z−1)(DF2−3)

這個恆等式?
我沒看出關聯

10s考えました >

關聯其實是：DF^2-3 **與** BF^2-1 **化成** $z=\sin x$ **後，含有同一個五次多項式因子**。把共同因子消掉，就得到那個恆等式。

設

$$z=\sin x,\qquad \cos 2x=1-2z^2,\qquad \sin 3x=3z-4z^3.$$

並且

$$CD=\frac{1}{2z}-1=\frac{1-2z}{2z},$$
$$CF=\frac{1}{4z(1-2z^2)}-1=\frac{1-4z+8z^3}{4z(1-2z^2)}.$$

為了少寫一些，令

$$P(z)=32z^5-16z^4-32z^3+12z^2+6z-1.$$

先整理 DF^2-3

由餘弦定理：

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 - 2CD \cdot CF \cos 2x.$$

因此

$$DF^2 - 3 = \left(\frac{1-2z}{2z}\right)^2 + \left(\frac{1-4z+8z^3}{4z(1-2z^2)}\right)^2$$
$$-2\left(\frac{1-2z}{2z}\right)\left(\frac{1-4z+8z^3}{4z(1-2z^2)}\right)(1-2z^2) - 3.$$

通分後，分母是

$$16z^2(1-2z^2)^2.$$

分子整理並因式分解，可得

$$DF^2 - 3 = \frac{(8z^3-6z-1)P(z)}{16z^2(1-2z^2)^2}.$$

也就是

$$\boxed{DF^2 - 3 = \frac{(8z^3-6z-1)P(z)}{16z^2(1-2z^2)^2}}.$$

再整理 $BF^2 - 1$

由餘弦定理：

$$BF^2 = 1 + CF^2 - 2CF \sin 3x.$$

所以

$$BF^2 - 1 = CF^2 - 2CF \sin 3x.$$

代入 CF 和 $\sin 3x$：

$$BF^2 - 1 = \left(\frac{1-4z+8z^3}{4z(1-2z^2)}\right)^2$$
$$-2\left(\frac{1-4z+8z^3}{4z(1-2z^2)}\right)(3z-4z^3).$$

通分並因式分解後得到

$$BF^2 - 1 = -\frac{(2z-1)(2z+1)(4z^2+2z-1)P(z)}{16z^2(1-2z^2)^2}.$$

也就是

$$\boxed{BF^2 - 1 = -\frac{(2z-1)(2z+1)(4z^2+2z-1)P(z)}{16z^2(1-2z^2)^2}}.$$

兩式的共同部分

現在兩式都是：

$$DF^2 - 3 = \frac{(8z^3-6z-1)P(z)}{Q(z)},$$

$$BF^2 - 1 = -\frac{(2z-1)(2z+1)(4z^2+2z-1)P(z)}{Q(z)},$$

其中

$$Q(z) = 16z^2(1-2z^2)^2.$$

因此：

$$(8z^3-6z-1)(BF^2-1)$$
$$= -\frac{(8z^3-6z-1)(2z-1)(2z+1)(4z^2+2z-1)P(z)}{Q(z)},$$

而

$$-(2z-1)(2z+1)(4z^2+2z-1)(DF^2-3)$$

也等於完全相同的式子。

所以得到

$$\boxed{(8z^3-6z-1)(BF^2-1) = -(2z-1)(2z+1)(4z^2+2z-1)(DF^2-3)}.$$

換句話說，這不是從兩個餘弦定理「一眼看出」的幾何關係，而是因為它們展開後共享同一個因

子：

$$P(z) = 32z^5 - 16z^4 - 32z^3 + 12z^2 + 6z - 1.$$

所以雖然它避開了「解五次方程式」，但本質上仍然是把五次多項式藏在共同因子裡。這個方法代數上成立，卻稱不上自然；你的質疑是對的。真正漂亮的解法仍應該是直接用幾何構造證明 $BF = 1$。

ChatGPT can make mistakes. Check important info.